Przestrzenie unormowane

Zadanie 1. Sprawdzić, że jeśli na przestrzeni liniowej X dana jest norma $\|\cdot\|\colon X \to [0,\infty)$, to jest ona funkcją ciągłą w topologii wyznaczonej przez tę właśnie normę.

Zadanie 2. Wykazać, że przekształcenie liniowe $T(x,y) = (x-y, x+y)$ spełnia tożsamość $\|Tv\|_\infty = \|v\|_1$.

Wskazówka. Sprawdzić, że T przeprowadza kulę jednostkową na kulę jednostkową.

Zadanie 3. Rozstrzygnąć, czy istnieje przekształcenie liniowe $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniające $\|Tv\|_\infty = \|v\|_1$.

Zadanie 4. Sprawdzić, że przestrzenie c, c_0 oraz ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$ są ośrodkowe, tzn. każda z nich posiada przeliczalny zbiór gęsty.

Zadanie 5. Wykazać, że ℓ_∞ nie jest przestrzenią ośrodkową.

Wskazówka. Wskazać nieprzeliczalny zbiór punktów odległych parami o co najmniej 1.

Zadanie 6. Rozważmy zbiór $A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ z topologią euklidesową oraz przestrzenie

$$\begin{aligned} X &= C(A), \\ Y &= \{f \in C(A) : f(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Sprawdzić, że X jest izometryczne z c, a Y jest izometryczne z c_0.

Uwaga. Bardziej ogólnie, $C_0(L)$ jest izometryczne z odpowiednią podprzestrzenią $C(\overline{L})$, gdzie $\overline{L}$ jest uzwarceniem Aleksandrowa.

Zadanie 7. Niech Γ będzie dowolnym zbiorem z miarą liczącą. Zdefiniujmy

$$\begin{aligned} c_0(\Gamma) &= \Big\{x\colon \Gamma \to \mathbb{K} : \{\gamma \in \Gamma : |x(\gamma)| \geqslant \varepsilon\} \text{ jest skończony dla dow. } \varepsilon > 0\Big\}, \\ \ell_\infty(\Gamma) &= \left\{x\colon \Gamma \to \mathbb{K} : \|x\|_\infty := \sup_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)| < \infty\right\}, \\ \ell_p(\Gamma) &= \left\{x\colon \Gamma \to \mathbb{K} : \|x\|_p^p := \sum_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)|^p < \infty\right\} \quad (1 \leqslant p < \infty). \end{aligned}$$

(a) Sprawdzić, że jeśli $x \in c_0(\Gamma)$ lub $x \in \ell_p(\Gamma)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, to nośnik x (czyli zbiór tych $\gamma \in \Gamma$, dla których $x(\gamma) \neq 0$) jest najwyżej przeliczalny.

(b) Przekonać się, że jeśli Γ jest zbiorem nieprzeliczalnym, to żadna z przestrzeni $c_0(\Gamma)$, $\ell_p(\Gamma)$ ($1 \leqslant p \leqslant \infty$) nie jest ośrodkowa.

Zadanie 8. (nierówność Höldera) Dana jest przestrzeń X z miarą μ oraz wykładniki $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ spełniające zależność $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Jeśli $f \in L_p(\mu)$ i $g \in L_q(\mu)$, to również $fg \in L_r(\mu)$, a ponadto

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Uwaga. Zadanie łatwo sprowadzić do przypadku $r = 1$ (najbardziej klasycznej wersji nierówności Höldera). Wykładnik q spełniający $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ będzie nam często towarzyszyć, dlatego będziemy go oznaczać przez p'.

Zadanie 9. (nierówność Minkowskiego) Dana jest przestrzeń X z miarą μ oraz wykładnik $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Wówczas spełniona jest nierówność trójkąta

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \quad \text{dla } f, g \in L_p(\mu).$$

Wskazówka. Zastosować nierówność Höldera dla $|f||f+g|^{p-1}$ i $|g||f+g|^{p-1}$.

Zadanie 10. Dowieść, że dla każdego $f \in L_\infty(X, \mu)$ istnieje zbiór $A \subseteq X$ pełnej miary, dla którego

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

Zadanie 11. Na przestrzeni liniowej X dane są dwie normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$. Sprawdzić, że

$$\|\cdot\|_2 \colon X \to \mathbb{R} \text{ jest funkcją } \|\cdot\|_1\text{-ciągłą} \quad \iff \quad \exists_{M>0}\, \|x\|_2 \leqslant M\|x\|_1 \quad \text{dla } x \in X.$$

W takim przypadku mówimy, że $\|\cdot\|_1$ jest normą *silniejszą* od $\|\cdot\|_2$ ($\|\cdot\|_2 \lesssim \|\cdot\|_1$).

Zadanie 12. Dwie normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ na tej samej przestrzeni liniowej X nazywamy *równoważnymi*, jeśli istnieje stała $M > 0$ spełniająca

$$M^{-1}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant M\|x\|_1 \quad \text{dla } x \in X.$$

Przekonać się, że dwie normy są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy wyznaczają tę samą topologię.

Zadanie 13. Na $\mathbb{R}^n$ dana jest norma $\|\cdot\|$. Sprawdzić, że istnieje stała $M > 0$ spełniająca

$$M^{-1} \leqslant \|x\| \leqslant M \quad \text{dla } x \in \partial[-1,1]^n,$$

a więc norma $\|\cdot\|$ jest równoważna normie supremum $\|\cdot\|_\infty$.

Zadanie 14. 🏠 Niech $T\colon X \to Y$ będzie operatorem liniowym między dwiema przestrzeniami unormowanymi. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(a) T jest operatorem ograniczonym, tzn. istnieje $M \geqslant 0$ spełniające $\|Tx\|_Y \leqslant M\|x\|_X$ dla $x \in X$;

(b) operator T jest ciągły;

(c) operator T jest ciągły w jakimś punkcie $x_0 \in X$.

Zadanie 15. (★ na 22.03.2021) Niech $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie przekształceniem liniowym między przestrzeniami euklidesowymi $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ (z normą euklidesową). Wykazać, że $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}}$, gdzie $\lambda_{\max}$ jest największą wartością własną $A^T A$.

Pytanie na przyszłość. Czym jest A^T w kontekście przekształceń liniowych (a nie po prostu macierzy)?

Zupełność przestrzeni unormowanych

Definicje.

- Ciąg a_n w przestrzeni metrycznej jest ciągiem Cauchy'ego, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_n - a_m| < \varepsilon$ dla wszystkich $n, m \geqslant n_0$.
- Przestrzeń metryczna jest zupełna, jeśli każdy ciąg Cauchy'ego w tej przestrzeni jest zbieżny.
- Przestrzeń unormowaną nazwiemy przestrzenią Banacha, jeśli jest zupełna (w zadanej normie).

Zadanie 1. Niech a_n będzie ciągiem Cauchy'ego, a a_{n_k} jego podciągiem (zbieżnym do a). Wykazać, że ciąg a_n również jest zbieżny (do a).

Zadanie 2. Załóżmy, że ciąg punktów $x_n \in B$ w przestrzeni Banacha B spełnia warunek $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Zdefiniować sumę $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in B$.

Zadanie 3. Niech X będzie przestrzenią Banacha, a $Y \subseteq X$ jej podprzestrzenią liniową. Wówczas Y jest przestrzenią Banacha (z normą dziedziczoną z X) wtedy i tylko wtedy, gdy jest domkniętą podprzestrzenią X.

Zadanie 4. Jeśli M jest skończenie wymiarową podprzestrzenią przestrzeni unormowanej, to M jest podprzestrzenią domkniętą.

Zadanie 5. (★ na 29.03.2021) Czy na przestrzeni c_{00} ciągów o skończenie wielu wyrazach niezerowych da się wprowadzić strukturę przestrzeni Banacha?

Zadanie 6. Przestrzenie c_0 i c są domkniętymi podprzestrzeniami ℓ_∞.
Przestrzeń $C_0(X)$ jest domkniętą podprzestrzenią $C_b(X)$, jeśli X jest lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa.

Zadanie 7. Niech E będzie przestrzenią funkcji wielomianowych na przedziale $[0, \infty)$. Dla $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ określmy normę na dwa sposoby:

$$\|f\|_1 := \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \qquad \|f\|_2 := \sup_{x \geqslant 0} |f(x)| e^{-x}.$$

(a) Sprawdzić, że są to dobrze określone, nierównoważne normy na E.

(b) Czy w którejś z nich przestrzeń E jest zupełna?

Zadanie 8. 🏠 Niech $V \subseteq C([-1,1])$ będzie podprzestrzenią liniową

$$V = \left\{ f \in C([-1,1]) : \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \right\}.$$

(a) Uzasadnić, że przestrzeń V wyposażona w normę dziedziczoną z $C([-1,1])$ (czyli normę supremum $\|f\|_\infty = \sup\{f(x) : x \in [-1,1]\}$) jest przestrzenią Banacha.

(b) Sprawdzić, że odległość funkcji $g(x) = x$ od V wynosi $\frac{1}{2}$, ale nie jest realizowana przez żaden element V. Innymi słowy,

$$\inf_{f \in V} \|f - g\|_\infty = \frac{1}{2}, \quad \text{ale} \quad \|f - g\|_\infty > \frac{1}{2} \text{ dla każdego } f \in V.$$

Norma operatora i przestrzenie sprzężone

Uwaga. Wiemy już, że operator liniowy $T\colon X \to Y$ jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$ dla pewnej stałej $M \geqslant 0$. Normą operatora T nazywamy najmniejszą taką stałą M.

Zadanie 1. Niech X będzie przestrzenią unormowaną (niekoniecznie zupełną!), a Y przestrzenią Banacha. Wówczas przestrzeń $\mathcal{L}(X,Y)$ operatorów ograniczonych $X \to Y$ (wyposażona w normę operatorową) jest przestrzenią Banacha.

Wniosek. $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ jest zawsze przestrzenią Banacha.

Zadanie 2. Określamy operator $T\colon \ell_1 \to c_0$ wzorem $T(x)_n := \sum_{k=n}^{\infty} x_k$. Wykaż, że T jest ciągły i oblicz jego normę.

Zadanie 3. Zbadaj ciągłość i znajdź normę przekształcenia $T\colon L_p[0,1] \to L_p[0,1]$ danego wzorem $Tf(x) := f(\sqrt{x})$.

Zadanie 4. Obliczyć normę $\mathrm{id}\colon \ell_p^n \to \ell_q^n$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$.

Definicja. Niech X będzie przestrzenią unormowaną. Funkcjonałem liniowym na X nazwiemy dowolne przekształcenie liniowe $\varphi\colon X \to \mathbb{K}$ w ciało skalarów. Przestrzenią sprzężoną do X nazwiemy przestrzeń liniową X^* wszystkich **ciągłych** funkcjonałów na X, wyposażoną w normę operatorową

$$\|\varphi\|_{X^*} := \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} |\langle \varphi, x \rangle|.$$

Zadanie 5. Funkcjonał $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadany jest wzorem

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

dla pewnych $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Wyznaczyć jego normę, gdy na $\mathbb{R}^n$ rozpatrujemy

(a) normę euklidesową $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$;

(b) normę $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$;

(c) normę $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$.

Zadanie 6. Z samej definicji, dla każdego ciągu $x \in c$ istnieje granica $\lim x_n$. Przekonać się, że $x \mapsto \lim x_n$ jest ciągłym funkcjonałem na c. Jaka jest jego norma?

Zadanie 7. Rozważmy płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ z normą

$$\|(x,y)\|_p = \left(|x|^p + |y|^p\right)^{1/p},$$

gdzie $1 < p < \infty$ jest ustalonym wykładnikiem. Dla zadanych liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$ wyznaczyć normę funkcjonału $\varphi(x,y) = ax + by$.
Wskazówka. Zbadać maksimum $|\varphi(v)|$ na zbiorze $\{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\|_p = 1\}$.

Zadanie 8. Dla zadanej przestrzeni unormowanej X i funkcjonału $\varphi \in X^*$ wyznaczyć normę operatorową $\|\varphi\|$.

(a) $X = \ell_2$, $\varphi(x_1, x_2, \ldots) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$

(b) $X = c_0$, $\varphi(x_1, x_2, \ldots) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$

(c) $X = \ell_1$, $\varphi(x_1, x_2, \ldots) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$

(d) $X = \ell_p$, $\varphi(x_1, x_2, \ldots) = \sum\limits_{n=1}^{N} x_n$ (gdzie $N \in \mathbb{N}$, $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

Zadanie 9. ☗ Niech

$$X = \Big\{ f \in C[0,1] : \ \forall_{t \in [0,1/2]} \ f(t) = 2f(1-t) \Big\}.$$

Czy X z normą supremum jest przestrzenią Banacha? Udowodnić, że następujące funkcjonały są ciągłe na X, i obliczyć ich normy:

(a) $\varphi(f) := f(1/4)$

(b) $\varphi(f) := f(3/4)$

(c) $\varphi(f) := \int_0^{1/2} f(x)\, \mathrm{d}x$

Uwaga. Poniższa seria zadań jest poświęcona przeniesieniu konstrukcji ilorazu i sumy prostej na grunt przestrzeni Banacha. Wrócimy do tych pojęć przy okazji twierdzenia o odwzorowaniu otwartym, ale chętnym polecam zapoznanie się już teraz.

Zadanie 10. Niech X będzie przestrzenią Banacha, a $Y \subseteq X$ jej domkniętą podprzestrzenią. Wprowadźmy przestrzeń ilorazową X/Y jako zbiór warstw $[x] = x + Y$, z normą ilorazową

$$\|[x]\| := \inf_{y \in Y} \|x + y\|.$$

Sprawdzić, że X/Y jest przestrzenią Banacha, a rzutowanie $x \mapsto [x]$ ma normę 1.
Wskazówka. Rozważyć ciąg Cauchy'ego $[x_n]$ spełniający $\|[x_{n+1}] - [x_n]\| \leqslant 2^{-n}$ i wskazać odpowiadający mu ciąg Cauchy'ego w X.

Zadanie 11. Jeśli ograniczony operator $T\colon X \to Y$ na przestrzeniach Banacha X, Y jest zerowy w obcięciu do domkniętej podprzestrzeni $X_0 \subseteq X$, to istnieje dokładnie jeden operator $\overline{T}\colon X/X_0 \to Y$, dla którego $Tx = \overline{T}[x]$ i $\|\overline{T}\| = \|T\|$.

Zadanie 12. Rozważmy następujące podprzestrzenie liniowe c_0:

$$\begin{aligned} M &= \{x \in c_0 : x_n = n x_{n-1} \text{ dla parzystych } n\}, \\ N &= \{x \in c_0 : x_n = 0 \text{ dla nieparzystych } n\}. \end{aligned}$$

Sprawdzić, że są to podprzestrzenie domknięte przecinające się jedynie w zerze, a suma algebraiczna

$$M + N = \{x + y : x \in M,\ y \in N\} \subseteq c_0$$

jest właściwą gęstą podprzestrzenią c_0. Wywnioskować, że następujące wynikanie jest fałszywe:

$$\left.\begin{array}{ll} M, N \subseteq X & \text{– domknięte podprzestrzenie} \\ X = M \otimes N & \text{w sensie algebraicznym} \end{array}\right\} \implies X \sim M \otimes_1 N.$$

Twierdzenie Hahna-Banacha

Twierdzenie. Niech X będzie przestrzenią unormowaną, $f\colon M \to \mathbb{K}$ ciągłym funkcjonałem określonym na pewnej podprzestrzeni liniowej $M \subseteq X$. Wówczas istnieje ciągłe przedłużenie $F\colon X \to \mathbb{K}$ o tej samej normie: $\|F\|_{X\to\mathbb{K}} = \|f\|_{M\to\mathbb{K}}$.

Zadanie 1. Niech X będzie przestrzenią unormowaną, $M \subseteq X$ jej podprzestrzenią liniową, a $x_0 \in X$ dowolnym punktem. Wykazać, że $x_0 \notin \overline{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcjonał $x^* \in X^*$ spełniający $\langle x^*, x_0\rangle = 1$ i $x^*|_M = 0$.

Zadanie 2. Wykazać, że jeśli przestrzeń X^* jest ośrodkowa, to przestrzeń unormowana X również.

Pytanie. Czy zachodzi również przeciwna implikacja?

Zadanie 3. (★ na 05.04.2021) Wykazać, że w ℓ_∞ istnieje funkcjonał, który nie jest reprezentowany przez ciąg z ℓ_1.

Zadanie 4. Niech X będzie przestrzenią unormowaną i $x \in X$. Wówczas istnieje funkcjonał $x^* \in X^*$, dla którego $\|x^*\| = 1$ i $\langle x^*, x\rangle = \|x\|$.

Zadanie 5. Niech X będzie przestrzenią unormowaną i $x \in X$. Wykazać, że

$$\|x\|_X = \sup_{\varphi\in X^*,\ \|\varphi\|_{X^*}\leqslant 1} \langle \varphi, x\rangle.$$

Uwaga. Wynik ten pozwala zastąpić badanie normy badaniem wyrażeń liniowych, co trudno przecenić.

Zadanie 6. Każdemu elementowi $x \in X$ można przyporządkować element $i(x) \in X^{**} = (X^*)^*$ wzorem

$$X^* \ni x^* \longmapsto \langle x^*, x\rangle \in \mathbb{K}.$$

Przekonać się, że zadaje to izometryczne włożenie $i\colon X \to X^{**}$ (zwane odwzorowaniem kanonicznym).

Uwaga. Przestrzenie, dla których to włożenie jest izometrycznym izomorfizmem, nazywamy *refleksywnymi.*

Ulubione przestrzenie sprzężone

Przypomnienie. Dla wielu przestrzeni X elementy przestrzeni sprzężonej X^* są łatwo scharakteryzowane:

- $c_{00}^* = c_0^* = \ell_1$ oraz $\ell_p^* = \ell_{p'}$ (dla $1 \leqslant p < \infty$) w sensie sparowania
$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$
- $c^* = \ell_1$ w (nietypowym) sensie sparowania $\langle x, y\rangle = x_1 \lim y_n + \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1} y_n$.
- Dla przestrzeni (X, μ) z σ-skończoną miarą oraz $1 \leqslant p < \infty$, $L_p(X)^* = L_q(X)$ w sensie sparowania
$$\langle f, g\rangle = \int_X f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$
- Dla zwartej przestrzeni K, $C(K)^* = \mathcal{M}(K)$ w sensie sparowania
$$\langle \mu, f\rangle = \int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Zadanie 1. Dla podprzestrzeni
$$M = \{x \in \ell_2 : x_2 = -2x_1,\ x_1 = -2x_2\}$$
przestrzeni ℓ_2 znaleźć funkcjonały $f, g \in \ell_2^*$ takie, że $M = \ker f \cap \ker g$.

Zadanie 2. Znaleźć normę funkcjonału $\varphi\colon L_3(0,1) \to \mathbb{K}$ zadanego przez
$$\varphi(f) = \int_0^{3/4} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 3. Wskazać funkcję $f \in L_2(0,1)$, dla której funkcjonał $\langle \varphi, g\rangle = \int_0^1 g(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ zadany na $L_2(0,1)$ wyraża się wzorem $\langle \varphi, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

Zadanie 4. Znaleźć nieograniczony liniowy funkcjonał $\varphi\colon \ell_2 \to \mathbb{R}$ (ale określony wszędzie).
Wskazówka. Przedłużyć jakoś funkcjonał $\varphi\colon c_{00} \to \mathbb{R}$ określony przez $\langle \varphi, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Uwaga. Przekonamy się później, że jeśli funkcjonał liniowy postaci $\ell_2 \ni x \mapsto \sum x_n y_n$ jest określony wszędzie, to musi być ograniczony.

Zadanie 5. Rozważmy punkty $a, b \in [0, 1]$ i odpowiadające im funkcjonały na $C([0, 1])$:

$$\delta_a(f) = f(a), \qquad \delta_b(f) = f(b).$$

Wyznaczyć normę $\|\delta_a - \delta_b\|_{C([0,1])^*}$ w zależności od a i b.

Zadanie 6. Dla danego funkcjonału $\Lambda \in C([0, 1])^*$ znaleźć miarę μ taką, że $\Lambda(f) = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}\mu(t)$ dla każdego $f \in C([0, 1])$, a następnie wyznaczyć $\|\Lambda\|$.

(a) $\Lambda(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t) \cos(\pi t)\, \mathrm{d}t$

(b) $\Lambda(f) = \dfrac{f(0) + f(1)}{2} - \displaystyle\int_0^1 t f(t)\, \mathrm{d}t$

W obu przypadkach znaleźć też funkcję y o wahaniu ograniczonym, której pochodną jest μ.

Zadanie 7. Niech μ będzie regularną miarą borelowską (ze znakiem) na $[0, 1]$. Jeśli

$$\int_{[0,1]} x^n \, \mathrm{d}\mu(x) = 0 \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

to $\mu = 0$.

Zadanie 8. Przekonać się, że każdy funkcjonał ciągły na $C^1([0, 1])$ jest postaci

$$C^1([0, 1]) \ni f \mapsto \int_{[0,1]} f(x)\, \mathrm{d}\mu(x) + \int_{[0,1]} f'(x)\, \mathrm{d}\nu(x)$$

dla pewnych miar μ, ν. W tym celu warto utożsamić $C^1([0, 1])$ z podprzestrzenią

$$X := \{(f, g) : f \text{ jest różniczkowalna w } (0, 1) \text{ oraz } f' = g\} \subseteq C([0, 1]) \oplus C([0, 1]).$$

Rozwiązanie. Najpierw kilka słów o produkcie dwóch przestrzeni Banacha E_1, E_2. Na $E_1 \times E_2$ możemy domyślnie przyjąć normę $\|(e_1, e_2)\|_{E_1 \oplus E_2} := \|e_1\|_{E_1} + \|e_2\|_{E_2}$ i powstałą przestrzeń Banacha oznaczać przez $E_1 \oplus E_2$. Nie ma to dużego znaczenia, wzięcie np. $\max(\|e_1\|_{E_1}, \|e_2\|_{E_2})$ zamiast sumy daje normę równoważną (co zresztą wynika z własności uniwersalnej). Łatwo sprawdzić, że para funkcjonałów $\varphi_1 \in E_1^*$, $\varphi_2 \in E_2^*$ zadaje funkcjonał na $E_1 \oplus E_2$ wzorem

$$E_1 \oplus E_2 \ni (e_1, e_2) \mapsto \varphi_1(e_1) + \varphi_2(e_2) \in \mathbb{K}.$$

I odwrotnie, każdy funkcjonał $\Phi \in (E_1 \oplus E_2)^*$ można przedstawić jak wyżej, jeśli przyjmiemy

$$\varphi_1(e_1) := \Phi(e_1, 0), \qquad \varphi_2(e_2) := \Phi(0, e_2).$$

Tak więc $(E_1 \oplus E_2)^* = E_1^* \otimes E_2^*$ (jak łatwo się przekonać, równoważne normy na $E_1 \oplus E_2$ odpowiadają równoważnym normom na $(E_1 \oplus E_2)^*$).

Przejdźmy do zadania. Na $C^1([0,1])$ przyjmijmy standardową normę

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Przy takim doborze norm na C^1 i $C \oplus C$ przyporządkowanie

$$C^1 \ni f \overset{j}{\mapsto} (f, f') \in X, \qquad X \ni (f, g) \overset{j^{-1}}{\longmapsto} f \in C^1$$

jest izometrią, możemy więc śmiało utożsamić C^1 i X (oraz funkcjonały na jednej i drugiej przestrzeni). Dowolny funkcjonał $\Phi \in X^*$ na mocy twierdzenia Hahna-Banacha przedłuża się do funkcjonału $\overline{\Phi} \in C \oplus C$. Ten z kolei – na mocy wcześniejszych uwag – reprezentuje się przez dwa funkcjonały $\varphi_1, \varphi_2 \in C^*$. Z twierdzenia Riesza wiemy, że odpowiadają im pewne miary borelowskie na $[0,1]$, a zatem

$$\overline{\Phi}(f, g) = \varphi_1(f) + \varphi_2(g) = \int_{[0,1]} f(x)\, \mathrm{d}\mu(x) + \int_{[0,1]} g(x)\, \mathrm{d}\nu(x) \quad \text{dla } f, g \in C,$$

a w obcięciu do X i po uwzględnieniu utożsamienia z C^1:

$$(\Phi \circ j)(f) = \Phi(f, f') = \int_{[0,1]} f(x)\, \mathrm{d}\mu(x) + \int_{[0,1]} f'(x)\, \mathrm{d}\nu(x) \quad \text{dla } f \in C^1.$$

$\square$

Zadanie 9. Przestrzeń $C([0,1])$ można traktować jako domkniętą podprzestrzeń $L_\infty([0,1])$. Funkcjonał $\delta_0(f) = f(0)$ jest ciągłym funkcjonałem o normie 1 na $C([0,1])$, zatem z twierdzenia Hahna-Banacha można go rozszerzyć do funkcjonału φ na $L_\infty([0,1])$ o normie 1. Sprawdzić, że nie istnieje funkcja $g \in L_1([0,1])$ spełniająca $\varphi(f) = \int_0^1 f(s)g(s)\, \mathrm{d}s$ dla $f \in L_\infty([0,1])$.

Zadanie 10. Ustalmy $N \in \mathbb{N}$. Wykazać, że istnieje regularna miara borelowska μ na $[0,1]$ taka, że dla każdego wielomianu P stopnia $\leqslant N$ zachodzi

$$\int_{[0,1]} P\, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{N} P^{(k)}\left(\frac{k}{N}\right).$$

Czy da się znaleźć takie μ, by powyższa nierówność zachodziła dla *wszystkich* wielomianów?

Zadanie 11. (★ na 26.04.2021) Wykazać, że dla liczb zespolonych $z_1, z_2, \dots, z_n$ istnieje taki zbiór $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, że

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i| \leqslant \pi \left| \sum_{i \in I} z_i \right|.$$

Zadanie 12. Rozważmy produkt przestrzeni z miarą (X, μ) i (Y, ν) oraz nieujemną funkcję mierzalną $f \colon X \times Y \to \mathbb{K}$. Wykazać ogólniejszą wersję Minkowskiego: dla $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ zachodzi nierówność

$$\| \|f\|_{L_p(X,\mu)} \|_{L_q(Y,\nu)} \leqslant \| \|f\|_{L_q(y,\nu)} \|_{L_p(X,\mu)}.$$

Przez podwójną normę rozumiemy, że najpierw całkujemy względem jednej zmiennej, a potem względem drugiej.

Wskazówka. Gdy $q < \infty$, można zamienić normę $\|h\|_{L_{q/p}(Y)}$ na supremum z $\int_Y gh \, \mathrm{d}\nu$ po wszystkich $\|g\|_{L_{(q/p)'}} \leqslant 1$.

Twierdzenia o oddzielaniu

Zadanie 1. Niech $C \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym wypukłym. Wykazać, że przez dowolny punkt $p \notin C$ można poprowadzić prostą rozłączną z C.

Wskazówka. Rozważyć obraz C przy przekształceniu $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \ni x \mapsto \frac{x-p}{|x-p|} \in \mathbb{S}^1$.

Zadanie 2. Niech B będzie przestrzenią Banacha, a $f\colon B \to \mathbb{R}$ funkcją ciągłą wypukłą. Wykazać, że dla dowolnego $x \in B$ istnieje hiperpłaszczyzna podpierająca, czyli funkcjonał $\varphi \in B^*$ spełniający

$$f(y) \geqslant f(x) + \varphi(y-x) \quad \text{dla } y \in B.$$

Wskazówka. Rozważyć zbiór $\{(y,t) : f(y) < t\}$ w $B \oplus \mathbb{R}$.

Suma prosta (uzupełnienie)

Zadanie 1. Rozważmy parę przestrzeni unormowanych E_1, E_2 oraz ustalmy dowolną normę $|\cdot|$ na $\mathbb{R}^2$. Na produkcie kartezjańskim $E_1 \times E_2$ określmy normę wzorem

$$\|(e_1, e_2)\| := \Big|(\|e_1\|_{E_1}, \|e_2\|_{E_2})\Big| \quad \text{dla } (e_1, e_2) \in E_1 \times E_2$$

i powstałą przestrzeń unormowaną nazwijmy $E_1 \oplus E_2$.

(a) Sprawdzić, że inny wybór normy na $\mathbb{R}^2$ dawałby równoważną normę na $E_1 \oplus E_2$.

(b) Sprawdzić, że rzutowania na współrzędne $p_k(e_1, e_2) = e_k$ $(k = 1, 2)$ są ciągłe, ponadto dla dowolnej przestrzeni unormowanej X i pary ciągłych operatorów $T_k \colon X \to E_k$ istnieje dokładnie jeden ciągły operator $T \colon X \to E_1 \oplus E_2$ spełniający $T_k = p_k \circ T$ (dla $k = 1, 2$).

(c) Sprawdzić, że włożenia $i_1(e_1) = (e_1, 0)$, $i_2(e_2) = (0, e_2)$ są ciągłe, ponadto dla dowolnej przestrzeni unormowanej X i pary ciągłych operatorów $T_k \colon E_k \to X$ istnieje dokładnie jeden ciągły operator $T \colon E_1 \oplus E_2 \to X$ spełniający $T_k = T \circ i_k$ (dla $k = 1, 2$).

Definicja. Niech X będzie przestrzenią Banacha, a $Y \subset X$ domkniętą podprzestrzenią. Powiemy, że Y ma dopełnienie, jeśli istnieje domknięta podprzestrzeń $Z \subseteq X$, dla której przekształcenie

$$\Phi \colon Y \oplus Z \to X, \quad \Phi(y, z) = y + z$$

jest izomorfizmem.

Zadanie 2. Przekonać się, że Y ma dopełnienie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje domknięta podprzestrzeń $Z \subseteq X$ spełniająca $Y \cap Z = \{0\}$ oraz $\operatorname{lin}(Y, Z) = X$.

Uwaga. Wymaga to powołania się na twierdzenie o odwzorowaniu otwartym.

Zadanie 3. Niech X będzie przestrzenią Banacha, a $Y \subset X$ domkniętą podprzestrzenią. Wykazać istnienie dopełnienia przy dodatkowym założeniu, że:

(a) Y jest wymiaru 1;

(b) Y jest kowymiaru 1, tzn. $Y = \ker \varphi$ dla pewnego $\varphi \in X^*$;

(c) (na przyszłość) X jest przestrzenią Hilberta, tzn. norma wyznaczona jest przez iloczyn skalarny.

Wskazówka. (a) Skorzystać z twierdzenia Hahna-Banacha. (b) Przyjąć $Z = \mathrm{lin}(x)$ dla pewnego $x \notin \ker \varphi$. (c) Przyjąć $Z = Y^{\perp} = \{x \in X : \forall_{y \in Y} \ \langle x, y \rangle = 0\}$.

Uwaga. Teza pozostanie prawdą, jeśli w (a) i (b) przyjmiemy *skończony* wymiar lub kowymiar.

Zadanie 4. (★ na 24.05.2021) Wykazać, że c_0 nie ma dopełnienia jako podprzestrzeń ℓ_∞.

Uwaga. To zadanie jest znane jako lemat Phillipsa i jest wyjątkowo trudne; zachęcam do zajrzenia do zewnętrznych źródeł.

Teoria spektralna – wstęp

Przypomnienie.

- Jeśli X, Y są przestrzeniami Banacha, to przestrzeń $\mathcal{L}(X,Y)$ ograniczonych operatorów $T\colon X \to Y$ również.
- Dla $S, T \in \mathcal{L}(X)$ mamy $\|ST\| \leqslant \|S\| \cdot \|T\|$ (gdzie $\mathcal{L}(X)$ oznacza $\mathcal{L}(X,X)$).
- Jeśli $T_n \in \mathcal{L}(X)$ oraz $\sum \|T_n\| < \infty$, to szereg $\sum T_n$ określa pewien element $\mathcal{L}(X)$.

Zadanie 1. Sprawdzić, że jeśli $T \in \mathcal{L}(X)$ oraz $\|T\| < 1$, to element $S := \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ jest dobrze określony oraz

$$S(I - T) = I = (I - T)S.$$

Zadanie 2. Wywnioskować z poprzedniego zadania, że

(a) operator $T - \lambda I$ jest odwracalny dla $\lambda > \|T\|$;

(b) jeśli odwracalny jest operator T, to odwracalny jest również $T + S$, o ile $\|S\|$ jest odpowiednio małe.

Uwaga. Wynika już stąd zwartość spektrum.

Zadanie 3. Niech $T \in \mathcal{L}(X)$. Wykazać, że element $\exp(T) := \sum \frac{1}{n!} T^n$ jest odwracalny. Jaka jest jego odwrotność?

Definicje. Dla operatora $T \in \mathcal{L}(X)$ definiujemy $\sigma(T)$ jako zbiór tych λ, dla których operator $T - \lambda I$ nie jest odwracalny.
Warto odnotować trzy powody, dla których może się to zdarzyć:

- $\lambda \in \sigma_p(T)$ (spektrum punktowe): λ jest wartością własną, czyli $T - \lambda I$ nie jest różnowartościowe;
- $\lambda \in \sigma_c(T)$ (spektrum ciągłe): λ nie jest wartością własną, ale obraz $T - \lambda I$ jest gęstą właściwą podprzestrzenią;

- $\lambda \in \sigma_r(T)$ (spektrum residualne): λ nie jest wartością własną, ale obraz $T - \lambda I$ nie jest nawet gęsty.

Zadanie 4. Sprawdzić, że operator

$$T(x, y) = (y, -x)$$

ma puste spektrum jako operator $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ale niepuste jako operator $T\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.

Uwaga. Z tego powodu od tej pory domyślnie będziemy rozpatrywali jedynie liczby zespolone jako ciało skalarów.

Zadanie 5. Znaleźć spektrum operatorów

$$\begin{aligned} T\colon L_1([0,1]) \to L_1([0,1]), \quad Tf(x) = xf(x), \\ S\colon C([0,1]) \to C([0,1]), \quad Sf(x) = xf(x). \end{aligned}$$

Jakie jest ich spektrum punktowe, ciągłe i residualne?

Zadanie 6. Wyznaczyć spektrum i rezolwentę operatorów przesunięcia w lewo i w prawo na ℓ_2:

$$\begin{gathered} R, L \in \mathcal{L}(\ell_2), \\ R(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots), \\ L(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots). \end{gathered}$$

Uwaga. W przyszłości będziemy mieli lepsze narzędzia do badania spektrum operatorów na przestrzeni Hilberta.

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że $\|R\| = \|L\| = 1$, a więc $\sigma(R), \sigma(L) \subseteq \overline{B}(0,1)$. Pokażemy, że istotnie spektrum obu operatorów to domknięte koło jednostkowe. Tymczasem zauważmy, że dla $|\lambda| > 1$ rezolwenta wyraża się poprzez zbieżny szereg potęgowy:

$$\begin{aligned} (\lambda I - R)^{-1} = \lambda^{-1}\left(I - \frac{R}{\lambda}\right)^{-1} = \lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(R/\lambda)^n, \\ (\lambda I - L)^{-1} = \lambda^{-1}\left(I - \frac{L}{\lambda}\right)^{-1} = \lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(L/\lambda)^n. \end{aligned}$$

Można odczytać stąd jawny wzór na rezolwentę. Mianowicie R^n to przesunięcie o n miejsc w prawo, a więc dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned}\Big((\lambda I - R)^{-1}x\Big)_k &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}\,(R^n x)_k \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{-n-1} x_{k-n}.\end{aligned}$$

Podobnie L^n jest przesunięciem o n miejsc w lewo, więc

$$\Big((\lambda I - L)^{-1}x\Big)_k = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x_{k+n}.$$

Poszukiwanie spektrum zacznijmy od spektrum punktowego L. Rozważanie równania $Lx = \lambda x$ łatwo prowadzi do wektora $x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$ (lub jego wielokrotności). Dla $|\lambda| < 1$ można bezpośrednio sprawdzić, że $x_\lambda \in \sigma(L)$ oraz $Lx_\lambda = \lambda x_\lambda$. Oznacza to, że całe koło otwarte $B(0,1)$ jest zawarte w $\sigma(L)$. Skoro jednak spektrum jest zwarte, to również $\overline{B}(0,1) \subseteq \sigma(L)$, co kończy poszukiwanie spektrum L.

Pokażemy teraz, że $B(0,1) \subseteq \sigma(R)$, skąd (podobnie jak dla L) wynikać będzie, że $\sigma(R) = \overline{B}(0,1)$. Ustalmy więc $|\lambda| < 1$. Łatwo się przekonać (przyrównując odpowiednie wyrazy), że dla dowolnego ciągu x (niekoniecznie z ℓ_2) istnieje dokładnie jeden ciąg y spełniający $(\lambda I - R)y = x$, i jest on wyrażony wyprowadzonym wcześniej wzorem na rezolwentę. Widać wtedy, że dla ciągu $x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$ takim ciągiem y jest $y_k = \lambda^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1} \lambda^{-2n}$. Ciąg ten nie należy do ℓ_2 (bo nie jest nawet ograniczony), a ponieważ jest jedyny, to nie istnieje $y' \in \ell_2$, dla którego $(\lambda I - R)y' = x_\lambda$. To kończy dowód.

Można też inaczej dowodzić, że x_λ nie należy do obrazu $\lambda I - R$. Oznaczając przez $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iloczyn skalarny w ℓ_2 i przyjmując dowolne $y \in \ell_2$, mamy mianowicie

$$\begin{aligned}\langle (\lambda I - R)y, x_\lambda \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda y_n - y_{n-1}) \cdot \lambda^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda y_n \cdot \lambda^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} y_{n-1} \lambda^{n-1} = 0,\end{aligned}$$

przy umowie notacyjnej, że $y_0 = 0$. Gdyby istniało $y \in \ell_2$ spełniające $(\lambda I - R)y = x_\lambda$, to otrzymalibyśmy sprzeczność: $\|x_\lambda\|^2 = 0$. Stąd wniosek, że x_λ nie leży w obrazie. $\square$

Operatory zwarte

Zadanie 1. Załóżmy, że X jest nieskończenie wymiarową przestrzenią unormowaną, zaś $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ jest domkniętą kulą jednostkową w X.

(a) Pokazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją wektory $x_1, x_2, \ldots \in B_X$ takie, że $\|x_j - x_k\| \geqslant 1 - \varepsilon$ dla $j \neq k$.

(b) Wywnioskować, że B_X nie jest zbiorem zwartym.

Zadanie 2. Wykazać, że złożenie operatora zwartego z ograniczonym (w dowolnej kolejności) daje operator zwarty.

Zadanie 3. Wywnioskować z poprzednich zadań, że na nieskończenie wymiarowej przestrzeni żaden operator zwarty T nie może być odwracalny. Innymi słowy, $0 \in \sigma(T)$.

Zadanie 4. Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi. Przekonać się, że jeśli $T\colon X \to Y$ jest przekształceniem liniowym oraz $\overline{T(B_X)}$ jest zbiorem zwartym w Y, to T jest ciągłe.

Zadanie 5. Niech $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ będzie operatorem skończenie wymiarowym, tzn. $\dim T(X) < \infty$. Sprawdzić, że T jest zwarty.

Zadanie 6. Sprawdzić, że jeśli $x_n \in X$ jest ciągiem ograniczonym, $T_k \to T$ w $\mathcal{L}(X)$, $T_k x_n \xrightarrow{n\to\infty} y_k$ dla każdego k oraz $y_k \to y_0$, to $T x_n \to y_0$.
Wywnioskować, że operatory zwarte $\mathcal{K}(X)$ stanowią domkniętą podprzestrzeń operatorów ograniczonych $\mathcal{L}(X)$.

Wskazówka. Zastosować metodę przekątniową.

Zadanie 7. Operator $T \in \mathcal{L}(\ell_p)$ jest wyznaczony przez ciąg $a_n \in \mathbb{C}$ wzorem $Te_n = a_n e_n$, gdzie e_n oznacza bazę kanoniczną ℓ_p. Wykazać, że T jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n \to 0$.

Zadanie 8. Czy operator *przesunięcia w prawo*

$$S\colon \ell_p \to \ell_p, \qquad S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

jest zwarty?

Zadanie 9. Zbadać zwartość następujących operatorów ciągłych:

(a) $T \in \mathcal{L}(C([0,1]))$, $Tf(x) = xf(x)$

(b) $T \in \mathcal{L}(C^1([0,1]), C([0,1]))$, $Tf = f$

(c) $T \in \mathcal{L}(L_2([0,1]))$, $Tf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Zadanie 10. ⯊ Załóżmy, że $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją 1-okresową i całkowalną na $[0,1]$, a $T \in \mathcal{L}(C([0,1]))$ jest zadane wzorem

$$T_g f(t) = \int_0^1 g(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{dla } f \in C([0,1]).$$

Czy da się dobrać g tak, by T_g było operatorem identycznościowym?

Przestrzenie Hilberta

Definicja. Iloczynem skalarnym na X nazwiemy funkcję $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X\times X\to\mathbb{K}$ spełniającą

- $\langle x,x\rangle\geqslant 0$, ponadto $\langle x,x\rangle=0$ tylko dla $x=0$;
- $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$ (gdy $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) lub $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$ (gdy $\mathbb{K}=\mathbb{C}$);
- $\langle x,y\rangle$ jest dwuliniowe (gdy $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) lub półtoraliniowe (gdy $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).

Definicja. Iloczyn skalarny wyznacza normę wzorem $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$. Gdy jest ona zupełna, przestrzeń nazywamy przestrzenią Hilberta.

Zadanie 1. Wykazać *twierdzenie Pitagorasa*: jeśli $\langle x,y\rangle=0$, to $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.

Zadanie 2. Sprawdzić, że jeśli norma $\|\cdot\|$ na X jest wyznaczona przez iloczyn skalarny $\langle\cdot,\cdot\rangle$, to zachodzi tzw. tożsamość równoległoboku:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2\quad\text{dla } x,y\in X.$$

Zadanie 3. Sprawdzić, że w dowolnej przestrzeni X (nad ciałem $\mathbb{K}$) z iloczynem skalarnym zachodzą tzw. tożsamości polaryzacyjne:

$$\langle x,y\rangle=\frac14\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)\qquad\text{gdy } \mathbb{K}=\mathbb{R},$$
$$\langle x,y\rangle=\frac14\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2\right)\qquad\text{gdy } \mathbb{K}=\mathbb{C}.$$

Uwaga. Pozwalają one wyznaczyć iloczyn skalarny za pomocą normy.

Zadanie 4. (★ na 31.05.2021) Wykazać twierdzenie Jordana–von Neumanna: jeśli w przestrzeni unormowanej X spełniona jest tożsamość równoległoboku, to funkcja $\langle\cdot,\cdot\rangle$ zadana przez tożsamości polaryzacyjne daje iloczyn skalarny wyznaczający wyjściową normę.

Uwaga. W rozwiązaniu można ograniczyć się do przypadku rzeczywistego.

Zadanie 5. Dla przestrzeni X z normą wyznaczoną przez iloczyn skalarny wyprowadzić następujące uogólnienie tożsamości równoległoboku:

$$\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n} \left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right\|^2 = 2^n \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \quad \text{dla } x_1,\ldots,x_n \in X.$$

Powyżej pierwsza suma jest indeksowana przez wszystkie n-elementowe ciągi o wyrazach $\varepsilon_i = \pm 1$.

Uwaga. W zadaniach niżej zakładamy, że $\mathcal{H}$ jest przestrzenią Hilberta.

Zadanie 6. Niech

$$M := \{f \in L_2([-1,1]) : f(x) = f(-x) \text{ p.w.}\} \subseteq L_2([-1,1]).$$

Znaleźć $M^\perp$ oraz rzut ortogonalny na M.

Zadanie 7. Niech V_n będzie podprzestrzenią $L_2([0,1])$ składającą się z funkcji stałych na przedziałach $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ (dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$).

(a) Znaleźć $V_n^\perp$.

(b) Znaleźć rzut ortogonalny na V_n.

(c) Znaleźć odległość funkcji $f(t) = t$ w $L_2([0,1])$ od V_n.

Zadanie 8. Załóżmy, że $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ są dwoma σ-ciałami podzbiorów X, a μ skończoną miarą na $(X, \mathcal{F})$. Wykazać, że

(a) $M = L_2(X, \mathcal{G}, \mu)$ jest domkniętą podprzestrzenią $L_2(X, \mathcal{F}, \mu)$.

(b) Dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{G}$ oraz dowolnego $f \in L_2(X, \mathcal{F}, \mu)$ zachodzi równość

$$\int_A P_M f \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu,$$

gdzie P_M oznacza rzut ortogonalny na M.

(c) Operator P_M jest nieujemny, tzn. jeśli $f \geqslant 0$ μ-p.w., to również $P_M f \geqslant 0$ μ-p.w.

Uwaga. Gdy μ jest miarą probabilistyczną, $P_M f$ nazywa się warunkową wartością oczekiwaną. Zapisujemy wtedy zazwyczaj $\int f = \mathbb{E}f$, $\int_A f = \mathbb{E}(f\mathbb{1}_A)$, $P_M f = \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$.

Zadanie 9. Udowodnić, że dla dowolnego zbioru $A \subseteq \mathcal{H}$ zachodzi równość $(A^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{lin} A}$.

Zadanie 10. Niech $\{x_\alpha\} \subseteq \mathcal{H}$ będzie zbiorem ortonormalnym, tzn. $\|x_\alpha\|^2 = 1$ i $\langle x_\alpha, x_\beta \rangle = 0$ dla $\alpha \neq \beta$. Wykazać, że wówczas następujące warunki są równoważne:

(a) Zbiór $\{x_\alpha\}$ jest maksymalny (ze względu na zawieranie) wśród zbiorów ortonormalnych.

(b) Podprzestrzeń $\operatorname{lin}\{x_\alpha\}$ jest gęsta w $\mathcal{H}$.

Zadanie 11. Zastosować ortogonalizację Gram–Schmidta do trzech wektorów $1, x, x^2$ w przestrzeni Hilberta $L_2([-1,1])$. Następnie wyznaczyć odległość od x^3 do $\operatorname{lin}(1, x, x^2)$, czyli obliczyć

$$\min_{a,b,c\in\mathbb{C}} \int_{-1}^{1} \left|x^3 - a - bx - cx^2\right|^2 \, dx.$$

Zadanie 12. W przestrzeni Hilberta $L_2([0,1])$ rozważmy podprzestrzeń

$$V = \left\{ f \in L_2([0,1]) : \int_0^1 t f(t) \, dt = 0 \text{ oraz } \int_0^1 t^3 f(t) \, dt = 0 \right\}.$$

Wyznaczyć $P_V(g)$ oraz $\operatorname{dist}(g, V)$, gdzie $g(t) = t^2$, a $P_V \colon L_2([0,1]) \to V$ jest rzutem ortogonalnym na V.

Zadanie 13. W dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta $\mathbb{R}^2$ rozważmy podprzestrzenie

$$M = \left\{ (x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \right\}, \quad N = \{ (x, x \cdot \operatorname{tg}\theta) : x \in \mathbb{R} \},$$

gdzie $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ jest ustalonym kątem. Znaleźć wzór na rzut (niekoniecznie ortogonalny) $E_\theta \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dla którego $\operatorname{im}(E_\theta) = M$ oraz $\ker(E_\theta) = N$. Wykazać, że $\|E_\theta\| = 1/\sin\theta$.

Zadanie 14. Załóżmy, że $\mathcal{H}$ jest przestrzenią Hilberta, a operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ spełnia $\langle Tx, x \rangle \geqslant \|x\|^2$ dla wszystkich $x \in \mathcal{H}$. Wykazać, że $T \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ jest izomorfizmem.

Wskazówka. Rozważyć dopełnienie ortogonalne obrazu T.

Operatory sprzężone w przestrzeniach Hilberta

Zadanie 1. Sprawdzić następujące własności sprzężenia operatorów $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$:

(a) $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$

(b) $(T+S)^* = T^* + S^*$

(c) $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$, $(ST)^* = T^* S^*$

(d) T jest odwracalny wtedy i tylko wtedy gdy T^* jest odwracalny

(e) $\sigma(T) = \sigma(T^*)$

Zadanie 2. W przestrzeni Hilberta ℓ_2:

(a) Wyznaczyć operator sprzężony do przesunięcia w prawo: $R(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$.

(b) Znaleźć spektrum operatorów R oraz R^*.

Wskazówka. Punkt (b) został już kiedyś rozwiązany, ale teoria operatorów sprzężonych pozwala uprościć rozumowanie.

Zadanie 3. Niech $T \in \mathcal{L}(L_2([0,1]))$ będzie określony wzorem $Tf(x) = \int_0^x f(y)dy$. Znaleźć T^*.

Zadanie 4. Operator $T \in \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))$ zadany jest wzorem $Tf(x) = \mathrm{sgn}(x) f(x+1)$. Znaleźć sprzężenie T^*. Czy T jest samosprzężony, unitarny, normalny?

Zadanie 5. Warunek $T^*T = \mathrm{id}$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy T jest włożeniem izometrycznym, tzn. $\|Tx\| = \|x\|$ dla $x \in \mathcal{H}$.

Zadanie 6. Dowieść, że $\|T^*T\| = \|T\|^2$ dla każdego $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
Wskazówka. $\|S\| = \sup_{\|x\|=1} \langle Sx, x \rangle$ dla samosprzężonego S.

Bazy ortonormalne

Twierdzenie Riesza-Fischera (i wnioski z niego). Każda przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ posiada bazę ortonormalną $\{u_\alpha\}$ (indeksowaną pewnym zbiorem A). Odwzorowania

$$\ell_2(A) \ni (\hat{x}_\alpha)_{\alpha\in A} \longmapsto \sum_{\alpha\in A} \hat{x}_\alpha u_\alpha \in \mathcal{H}, \qquad \mathcal{H} \ni x \longmapsto (\langle x, u_\alpha\rangle)_{\alpha\in A} \in \ell_2(A)$$

zadają izometrię $\mathcal{H} \cong \ell_2(A)$. W pewnym sensie teoria przestrzeni Hilberta sprowadza się do teorii przestrzeni ℓ_2. W konkretnych zastosowaniach istotne są jednak własności wybranej bazy ortonormalnej.

Zadanie 1. (układ trygonometryczny) Rodzina funkcji $(2\pi)^{-1/2}\exp(int)$ $(n \in \mathbb{Z})$ tworzy bazę ortonormalną przestrzeni $L_2([0, 2\pi])$.

Zadanie 2. Znaleźć współczynniki Fouriera funkcji $f(t) = t$ (w układzie trygonometrycznym w $L_2([-\pi, \pi])$) i wywnioskować, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Uwaga. Ewaluując otrzymane rozwinięcie $f(t) = t$ w punkcie $t = \pi/2$, otrzymujemy inną znaną tożsamość:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$$

Uzasadnienie poprawności tego rozumowania wykracza jednak (choć nieznacznie) poza omawiane tu przez nas narzędzia.

Zadanie 3. Określmy $H(x) = \mathbb{1}_{[0,1/2)} - \mathbb{1}_{[1/2,1)}$, a następnie dla $n, k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} h_{n,k}(t) &= 2^{n/2} h(2^n t - k) \\ &= 2^{n/2}\left(\mathbb{1}_{[k2^{-n},(2k+1)2^{-n-1})} - \mathbb{1}_{(2k+1)2^{-n-1},(k+1)2^{-n}}\right). \end{aligned}$$

Układ Haara defiujemy jako rodzinę $h_{n,k}$ $(n = 0, 1, 2, \dots$ i $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1)$ z dodaną funkcją $h_0(t) = 1$.

(a) Sprawdzić, że układ Haara jest ortonormalny w $L_2([0, 1])$.

(b) Dla każdego $N \in \mathbb{N}$ wykazać równość następujących przestrzeni:

$$\operatorname{lin}(h_0, h_{n,k} :\ n \leqslant N-1,\ 0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1) = \operatorname{lin}\left(\mathbb{1}_{[k2^{-N},(k+1)2^{-N})} :\ 0 \leqslant k \leqslant 2^N - 1\right).$$

(c) Uzasadnić, że układ Haara jest liniowo gęsty w $L_2([0,1])$.

Zadanie 4. Układ Haara $(h_{n,k})$ $(n,k \in \mathbb{Z})$ jest bazą ortonormalną w $L_2(\mathbb{R})$.

Uwaga. Układ Haara jest przykładem rodziny falek, czyli bazy ortonormalnej $\psi_{n,k}$ zadanej przez $\psi_{n,k}(t) = 2^{n/2}\psi(2^n t - k)$. Takie rodziny mają znaczenie dla zastosowań, da się też znaleźć podobny układ, w którym $\psi \in C_c(\mathbb{R})$.

Zadanie 5. Zdefiniujmy dla $n = 1, 2, \dots$ funkcje Rademachera $r_n \in L_2([0,1])$ wzorem $r_n(t) = \operatorname{sgn}\sin(2^n \pi t)$; innymi słowy, $r_n(t) = \pm 1$ ze znakiem zależnym od n-tego bitu t (w rozwinięciu binarnym). Czy po dodaniu funkcji stale równej 1 tworzą one bazę ortonormalną w $L_2([0,1])$?

Zadanie 6. Niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną wszystkich skończonych podzbiorów $\{1, 2, \dots\}$ i określmy układ Walsha $(w_A)_{A\in\mathcal{S}}$ jako

$$w_\emptyset \equiv 1, \qquad w_A = \prod_{n\in A} r_n \quad \text{dla } A \in \mathcal{S},\ A \neq \emptyset.$$

Wykazać, że jest to baza ortonormalna $L_2([0,1])$.

Zadanie 7. Niech P_n będzie układem wielomianów Legendre'a

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n, \quad t \in [-1,1],\ n = 0, 1, 2, \dots.$$

(a) Wykazać, że P_n jest układem ortogonalnym w $L_2([-1,1])$. Jak go trzeba znormalizować, by był ortonormalny?

(b) Czy jest to układ zupełny?

Zadanie 8. (★ na 7.06.2021) Niech $\mathcal{H}$ będzie nieskończenie wymiarową przestrzenią Hilberta. Wykazać, że istnieje ciągła funkcja $\gamma\colon [0,1] \to \mathcal{H}$ (czy krzywa), która jest różnowartościowa i ma ortogonalne przyrosty, to znaczy:

$$(\gamma(a) - \gamma(b)) \perp (\gamma(c) - \gamma(d)) \quad \text{dla wszystkich } 0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant 1.$$

Zadanie 9. (★ na 7.06.2021) Niech $(f_i(x))_i$ oraz $(g_j(y))_j$ będa układami ortogonalnymi odpowiednio w $L_2(X,\mu)$ oraz $L_2(Y,\nu)$. Wykazać, że

(a) układ $(f_i(x)g_j(y))_{i,j}$ jest układem ortonormalnym w $L_2(X\times Y, \mu\otimes\nu)$;

(b) jeśli układy $(f_i)_i$, $(g_j)_j$ są zupełne, to układ $(f_i g_j)_{i,j}$ też jest zupełny.

Twierdzenie Radona-Nikodyma

Zadanie 1. Niech λ będzie miarą Lebesgue'a na $[0,1]$, a μ miarą liczącą na $[0,1]$. Przekonać się, że $\lambda \ll \mu$, ale λ nie posiada gęstości względem μ.

Uwaga. To wskazuje na istotność założenia σ-skończoności miar w twierdzeniu Radona-Nikodyma.

Zadanie 2. Wykazać, że jeśli $\mu \perp \nu$, to $|\mu + \nu| = |\mu| + |\nu|$.

Zadanie 3. Niech μ, ν będą dwiema miarami probabilistycznymi na tej samej przestrzeni mierzalnej $(X, \mathcal{F})$. Korzystając z twierdzenia Radona-Nikodyma, wykazać, że jeśli $|\alpha\mu - \beta\nu|(X) = 1$ dla pewnych dodatnich α, β sumujących się do 1, to μ, ν są wzajemnie osobliwe.

Konsekwencje twierdzenia Baire'a

Twierdzenie (Banacha-Steinhausa). Niech $T_\alpha \colon X \to Y$ będzie rodziną ciągłych operatorów liniowych między dwiema przestrzeniami Banacha X, Y. Jeśli rodzina ta jest ograniczona punktowo (tzn. $\sup_\alpha \|T_\alpha x\| < \infty$ dla $x \in X$), to jest również ograniczona w normie (tzn. $\sup_\alpha \|T_\alpha\| < \infty$).

Twierdzenie (Banacha o odwzorowaniu otwartym). Załóżmy, że $T \colon X \to Y$ jest ciągłym operatorem liniowym między dwiema przestrzeniami Banacha X, Y. Wówczas T jest „na" wtedy i tylko wtedy, gdy T jest otwarty, tzn. gdy obraz dowolnego zbioru otwartego w X jest otwarty w Y.

Zadanie 1. Jeśli przestrzeń unormowana X posiada przeliczalną bazę $e_1, e_2, \ldots$, to nie może być zupełna.

Wskazówka. Zastosować twierdzenie Baire'a do zbiorów $V_n := \mathrm{lin}(e_1, \ldots, e_n)$.

Zadanie 2. Niech $1 \leqslant p < \infty$ oraz $q = p' = \frac{p}{p-1}$. Jeśli x jest ciągiem takim, że szereg $\sum x_n y_n$ jest zbieżny dla każdego $y \in \ell_p$, to $x \in \ell_q$.

Zadanie 3. Niech $T \colon X \to Y$ będzie ciągłą liniową bijekcją między przestrzeniami Banacha X, Y. Wówczas T jest izomorfizmem, tzn. odwrotność $T^{-1} \colon Y \to X$ jest ciągła.

Uwaga. Uzasadnia to np. podział spektrum na część punktową, ciągłą i rezydualną.

Zadanie 4. Niech Y, Z będą dwiema domkniętymi podprzestrzeniami przestrzeni Banacha X. Załóżmy ponadto, że $Y + Z = X$ oraz $Y \cap Z = \{0\}$. Wykazać, że rzut $P \colon X \to X$ zadany przez $P|_Y = \mathrm{id}_Y$ i $P|_Z = 0$ jest przekształceniem ciągłym.

Wskazówka. Wykazać, że X jest sumą prostą Y i Z, czyli że przekształcenie $Y \oplus Z \ni (y, z) \mapsto y + z \in X$ jest izomorfizmem.

Zadanie 5. (twierdzenie Banacha o wykresie domkniętym) Jeśli przekształcenie liniowe $T \colon X \to Y$ między dwiema przestrzeniami Banacha X, Y ma domknięty wykres (czyli $\Gamma = \{(x, Tx) : x \in X\}$ jest domkniętą podprzestrzenią $X \oplus Y$), to T jest ciągłe.

Wskazówka. Rozważyć obcięcie rzutowania $P \colon X \oplus Y \to X$ do Γ.

Uwaga. Ciągłość operatora liniowego $T \colon X \to Y$ można wyrazić warunkiem:

$$\forall\, x_k \in X \qquad x_k \to x \quad \Longrightarrow \quad Tx_k \to Tx.$$

Twierdzenie o wykresie domkniętym mówi, że równoważny jest mu warunek

$$\forall\, x_k \in X \qquad x_k \to x,\ Tx_k \to y \quad \implies \quad Tx = y,$$

który często łatwiej jest sprawdzić.

Zadanie 6. Załóżmy, że $T\colon X \to Y$ jest operatorem liniowym między przestrzeniami Banacha X, Y. Wykazać, że T jest ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\varphi \in Y^*$, $\varphi \circ T$ jest ciągłym funkcjonałem na X.

Wskazówka. Twierdzenie o wykresie domkniętym.

Zadanie 7. Załóżmy, że $T_n\colon X \to Y$ są ciągłymi operatorami liniowymi między przestrzeniami Banacha, oraz że dla każdego $x \in X$ istnieje granica $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$. Wówczas operator T jest ciągły.

Wskazówka. Przekonać się, że rodzina T_n jest ograniczona w normie, i skorzystać z twierdzenia o wykresie domkniętym.

Zadanie 8. Załóżmy, że X, Y są przestrzeniami Banacha oraz T jest ciągłym operatorem liniowym z X na Y. Wykazać, że istnieje dokładnie jeden izomorfizm $S\colon X/\ker T \to Y$ spełniający $T = Sq$, gdzie q jest kanonicznym rzutem X na $X/\ker T$.
Wynioskować stąd, że każda ośrodkowa przestrzeń Banacha jest izomorficzna z pewnym ilorazem przestrzeni ℓ_1.

Zadanie 9. Wykazać, że obraz operatora $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ (między przestrzeniami Banacha X, Y) jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała $c > 0$ spełniająca $\|Tx\| \geqslant c\|x\|$ dla $x \in X$.

Zadanie 10. Załóżmy, że X, Y, Z są przestrzeniami Banacha, a operatory liniowe $A\colon X \to Y$, $B\colon X \to Z$, $C\colon Y \to Z$ spełniają $B = CA$. Załóżmy ponadto, że dla każdego $x \in X$ punkt $y = Ax$ jest jedynym spełniającym równanie $Bx = Cy$. Wykazać, że jeśli B, C są ciągłe, to A również.

Zadanie 11. Dla każdego $t \in \mathbb{S}^1$ istnieje funkcja ciągła $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$, dla której szereg Fouriera nie jest zbieżny w punkcie t.

Zadanie 12. Niech $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ będą dwiema zupełnymi normami na przestrzeni liniowej X (tzn. $(X, \|\cdot\|_1)$, $(X, \|\cdot\|_2)$ są przestrzeniami Banacha). Załóżmy ponadto, że istnieje stała $C > 0$ taka, że $\|x\|_1 \leqslant C\|x\|_2$ dla wszystkich $x \in X$. Wówczas normy te są równoważne, czyli istnieje również stała $C' > 0$ spełniająca $\|x\|_2 \leqslant C'\|x\|_1$ dla $x \in X$.

Zadanie 13. Rozważmy przekształcenie liniowe $T\colon X \to \ell_p$ (na przestrzeni Banacha X) zadane przez ciąg $T_n\colon X \to \mathbb{K}$ wzorem $Tx = (T_n x)_{n\geqslant 1}$. Wówczas przekształcenie T jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie T_n są ciągłe.